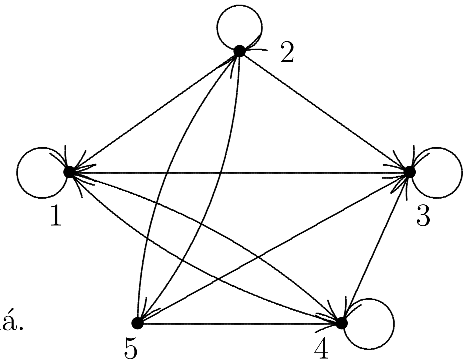
Rozložitelnost matic 2

Zjistěte, zda je matice $\mathbf{A}$ rozložitelná, a pokud ano, najděte příslušnou permutaci řádků a sloupců.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

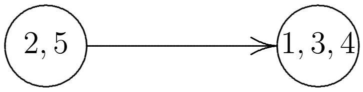
Řešení.

1. Sestrojíme diagram $\overrightarrow{G}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$:

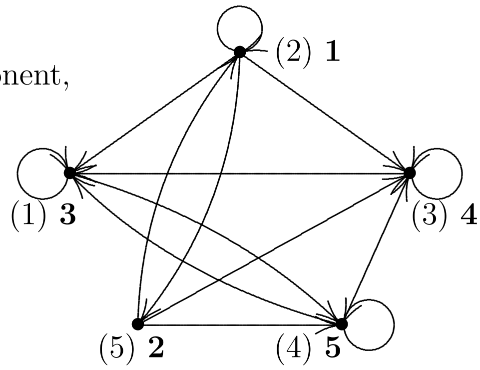


Graf $\overrightarrow{G}(\mathbf{A})$ není silně souvislý a tedy $\mathbf{A}$ je rozložitelná.

2. Graf $\overrightarrow{G}(\mathbf{A})$ má dvě kvazikomponenty s uzlovými množinami $\{2,5\}$ a $\{1,3,4\}$, kondenzace je na obrázku. Komponenty očíslujeme podle věty o acyklických grafech: $G_1 = \{2,5\}$, $G_2 = \{1,3,4\}$.



3. Přečíslujeme uzly souhlasně s očíslováním kvazikomponent, tj. nejprve uzly v G_1, pak v G_2 (stará čísla uzlů jsou opět v závorkách a nová jsou tučně):



4. Porovnáním starých a nových čísel uzlů dostáváme permutaci π, která rozkládá matici $\mathbf{A}$:

Stará čísla uzlů	1	2	3	4	5
Nová čísla uzlů	3	1	4	5	2

5. Provedením permutace π na řádky a sloupce matice $\mathbf{A}$ postupně dostaneme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$